© *С.К. Соболев.* **Лекции по линейной алгебре.**
Лекция 4.

Лекция 4. Характеристический многочлен линейного оператора, его независимость от базиса. След матрицы линейного оператора и его инвариантность. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы. Свойство множества собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения, связь между ними (без док-ва). Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Существование базиса из собственных векторов в случае действительных и некратных корней характеристического уравнения. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов.

4.1. Характеристический многочлен линейного оператора, его независимость от базиса.

Напомним, что число $\lambda \in \mathbf{R}$ называется ***собственным значением*** линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве L, если найдется ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, также называемый ***собственным***, такой, что

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} \qquad (*)$$

Если пространство L конечномерно (размерности n) и имеет базис ε, в котором A – матрица оператора $\mathcal{A}$, X – столбец координат собственного вектора $\boldsymbol{x}$, то (*) равносильно матричному равенству

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda EX = O \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = O \qquad (**)$$

где E единичная матрица, и O – нулевой столбец. Последнее равенство (**) можно рассматривать как матричную запись системы из n однородных линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (координатами собственного вектора $\boldsymbol{x}$) и матрицей $A - \lambda E$, где λ – собственное значение:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1} + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (***)$$

Матрица

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \qquad (****)$$

называется ***характеристической матрицей*** линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе ε.
Если собственное значение известно, то искомые координаты собственного вектора образуют ненулевое решение системы (***).

Теорема 4.1. *Число* $\lambda \in \mathbf{R}$ *является собственным значением линейного оператора с матрицей A некотором базисе тогда и только тогда, когда* $\det(A - \lambda E) = 0$.

Доказательство вытекает из критерия существования ненулевого решения однородной СЛАУ с квадратной матрицей. ■

[Напомним факты из теории однородных СЛАУ.
(1) Однородная СЛАУ всегда совместна;
(2) Однородная СЛАУ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ ранг её матрицы меньше числа неизвестных;
(3) Однородная СЛАУ с квадратной матрицей A имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.]

Если рассматривать λ как переменную, то определитель

$$\det(a-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}=P_A(\lambda)$$

представляет собой многочлен степени *n* от λ, называемый ***характеристическим***, и собственные числа оператора $\mathcal{A}$ суть **вещественные корни** этого многочлена. Равенство $\det(A-\lambda E)=0$ есть алгебраическое равнение, называемое тоже ***характеристическим***.

Например, при $n=2$ характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda)=\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=$$

$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{12})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda^2-\mathrm{Tr}(A)\lambda+\det(A)$$

Оказывается, в общем виде характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda)=(-1)^n\left(\lambda^n-\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}-\ldots\right)+\alpha_n,$$

где α_k равно сумме всех главных миноров порядка *k* матрицы *A*., $k=1,2,\ldots,n$.

(напомним, то **минор порядка *k*** матрицы *A* – это определитель, составленный из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении каких-то её *k* строк и каких-то *k* столбцов. ***Главный минор*** составлен из элементов на пересечении строк и столбцов с **одинаковыми** номерами).

В частности, всегда $\alpha_1=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=\mathrm{Tr}(A)$ – **след** матрицы *A*, коэффициент α_2 равен сумме всех главных миноров второго порядка матрицы *A*, например, при $n=3$:

$$\alpha_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$\alpha_n=\det(A)$ – её **определитель**.

Мы уже на прошлой лекции доказали, что след матрицы линейного оператора и её определитель не зависят от базиса. Оказывается, **все** коэффициенты характеристического многочлена не зависят от базиса.

Теорема 4.2. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от базиса.*

Доказательство. Пусть *A* – матрица линейного оператора в базисе ε, A' – матрица этого же линейного оператора в другом базисе φ, $P=P_{\varepsilon\to\varphi}$ – матрица перехода, $\det(P)=\Delta\neq 0$, $P_\varepsilon(\lambda)$ и $P_\varphi(\lambda)$ характеристические многочлены в этих базисах. Тогда:

$$P_\varphi(\lambda)=\det\left(A'-\lambda E\right)=\det\left(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}EP\right)=\det\left(P^{-1}(A-\lambda E)P\right)=$$

$$=\det(P^{-1})\cdot\det\left(A'-\lambda E\right)\cdot\det(P)=\frac{1}{\Delta}\cdot P_\varepsilon(\lambda)\cdot\Delta=P_\varepsilon(\lambda).\ \blacksquare$$

Напомним, что число λ_0 называется корнем многочлена $P(\lambda)$ ***кратности k***, если справедливо представление $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^kQ(\lambda)$ и $Q(\lambda_0)\neq 0$. Например, если $P(\lambda)=\lambda(\lambda-5)^3(\lambda+4)^2$, то многочлен $P(\lambda)$ имеет корни $\lambda_1=0$ кратности 1, $\lambda_2=5$ кратности 3, и $\lambda_3=-4$ кратности 2. Корень многочлена кратности 1 называется ***простым***, корень кратности 2 и больше – ***кратным*** корнем. Как известно, многочлен степени *n* имеет ровно *n* корней, включая комплексные и с учетом их кратностей. Также вспомним, что *многочлен нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.*

Отметим еще одно свойство корней произвольного многочлена

Теорема 4.3. (обобщенная теорема Виета): *для многочлена*

$$P(\lambda)=\lambda^n-\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}-\ldots+(-1)^n\alpha_n$$

коэффициент α_1 *равен сумме всех корней этого многочлена*

(всех, включая комплексные, и с учетом кратностей): $\alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$,
коэффициент α_2 *равен сумме всех попарных произведений корней многочлена* $P(\lambda)$:
$\alpha_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n$, ...,
коэффициент α_k *равен сумме всех произведений корней многочлена* $P(\lambda)$, *взятых по k множителей в каждом произведении,*
коэффициент α_n *равен произведению всех корней многочлена* $P(\lambda)$ *(всех, включая комплексные, и с учетом кратностей):* $\alpha_n = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

Пример 4.1. Найти многочлен 3-й степени, имеющий корни $\lambda = 3$ (кратности 2) и $\lambda = -5$ (кратности 1).
Решение. Запишем корни так: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -5$, коэффициенты искомого многочлена

$$\lambda_3 - \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda - \alpha_3$$

ищем по формулам Виета:

$$\alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 3 + (-5) = 1,$$
$$\alpha_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3\cdot 3 + 3\cdot(-5) + 3\cdot(-5) = -21,$$
$$\alpha_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 3\cdot 3\cdot(-5) = -45.$$

Искомое кубическое уравнение: $\lambda^3 - \lambda^2 - 21\lambda + 45 = 0$. ■

Пример 4.2. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Корни: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$, оба вещественны, поэтому они являются собственными значениями. Найдем собственные векторы, им отвечающие как решения однородной СЛАУ с матрицей $A - \lambda E$

$$1)\ \lambda = -1 \Rightarrow A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

соответствующая однородная система

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ имеет общее решение $X = (x_1; x_2) = (C; -C) = C(1; -1)$., где C – произвольная ненулевая константа. Собственный вектор: $\boldsymbol{f}_1 = (1; -1)$, а также любой ненулевой, ему пропорциональный).

$$2)\ \lambda = 3 \Rightarrow A - \lambda E = A - 3E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

соответствующая однородная система

$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ имеет общее решение $X = (x_1; x_2) = (C; 3C) = C(1; 3)$., где C – произвольная ненулевая константа. Собственный вектор: $\boldsymbol{f}_2 = (1; 3)$, а также любо ненулевой, ему пропорциональный). ■

4.2. Свойство множества собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения, связь между ними.

Теорема 4.4. *Пусть* λ *– собственное число линейного оператора, действующего в линейном пространстве L,* S_λ *– множество* ***всех*** *собственных векторов этого линейного оператора,* *отвечающих данному собственному числу* λ, *пополненное нулевым вектором, т.е.* $S_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in L \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\}$. *Тогда* $S_\lambda \sqsubset L$, *т.е.* S_λ *– подпространство всего пространства L.*

Доказательство. Теорема утверждает, что множество S_λ замкнуто относительно линейных комбинаций, т.е. что любая линейная комбинация собственных векторов, отвечающих собственному числу λ, также есть собственный вектор, отвечающий этому же собственному числу λ. В самом деле, если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_\lambda$, то это значит, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{y}$, и тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

$$\mathcal{A}(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \beta \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \alpha\lambda \boldsymbol{x} + \beta\lambda \boldsymbol{y} = \lambda(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y})$$
$$\Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in S_\lambda. \ \blacksquare$$

Определение. ***Геометрической кратностью*** собственного значения λ линейного оператора $\mathcal{A}$ называется натуральное число $r_g(\lambda) = \dim S_\lambda$ – размерность собственного подпространства S_λ, т.к. количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению λ, она равна $r_g(\lambda) = \dim L - \mathrm{rg}(A - \lambda E)$. ***Алгебраической кратностью*** собственного значения λ линейного оператора $\mathcal{A}$ называется натуральное число $r_a(\lambda)$, равное кратности этого числа как корня его характеристического многочлена.

Теорема 4.5. *Для любого собственного значения* λ *линейного оператора его геометрическая кратность не превосходит алгебраической кратности, т.е.* $1 \le r_g(\lambda) \le r_a(\lambda)$.

4.3. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.

Теорема 4.6. *Собственные векторы, отвечающие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть даны собственные векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, линейного оператора $\mathcal{A}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, т.е. $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \lambda_i \boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \ldots, k$ и $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$. Линейную независимость векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ докажем по индукции. Для $k = 1$ вектор $\boldsymbol{b}_1 \ne \boldsymbol{0}$ и поэтому линейно независим. Пусть утверждение верно для k векторов, и допустим их $(k+1)$. Предположим, что какая-то линейная комбинация этих векторов дает нулевой вектор:

$$\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{b}_{k+1} = \boldsymbol{0}. \qquad (\#)$$

Применим к левой и правой частям (#) оператор $\mathcal{A}$, получим (т.к. он линеен):

$$\mathcal{A}\left(\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{b}_{k+1}\right) = \mathcal{A}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$
$$\alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_k) + \alpha_{k+1} \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_{k+1}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$
$$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k \boldsymbol{b}_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \boldsymbol{b}_{k+1} = \boldsymbol{0}$$

Из последнего равенства вычтем (#), умноженное на λ_{k+1}, получим

$$\underbrace{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\beta_1} \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \underbrace{\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\beta_k} \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}.$$

По индуктивному предположению, векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ линейно независимы, поэтому $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$, а поскольку $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$, то $\alpha_1 = \ldots = a_k = 0$. Но так как $\boldsymbol{b}_{k+1} \ne \boldsymbol{0}$, то из (#) следует, что и $\alpha_{k+1} = 0$. Итак, равенство (#) возможно только если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$. Это и значит что векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}$ линейно независимы. $\blacksquare$

Замечание. Подавляющее число студентов математическую индукцию в школе не проходили (можно попросить поднять руки), и в курсе высшей математики в МГТУ им. Н.Э. Баумана – это **первая** теорема, в которой она применяется. Поэтому перед вышеприведенным доказательством хорошо бы принцип математической индукции как следует сформулировать и пояснить. Либо вообще не доказывать эту теорему.

4.4. Существование базиса из собственных векторов в случае действительных и некратных корней характеристического уравнения. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов.

Предыдущая теорема дает надежду, для данного линейного оператора может существовать базис из его собственных векторов. А какова будет матрица оператора в этом базисе?

Теорема 4.7. *Если у линейного оператора* $\mathcal{A}$ *собственные векторы* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$, *отвечающие собственным значениям (не обязательно различным между собой)* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, *соответственно, образуют базис, то в этом базисе матрица* A' *оператора* $\mathcal{A}$ *имеет диагональный вид, и на диагонали стоят (в указанном порядке) собственные числа* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$*:*

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\#\#)$$

Доказательство. В самом деле, вспомним, что матрица линейного оператора в базисе $\beta = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n\}$ состоит из координат (в этом базисе) образов базисных векторов, записанных по столбцам:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + 0\boldsymbol{b}_2 + 0\boldsymbol{b}_3 + ... + 0\boldsymbol{b}_n,$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2) = \lambda_2\boldsymbol{b}_2 = 0\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2 + 0\boldsymbol{b}_3 + ... + 0\boldsymbol{b}_n,$$

....

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) = \lambda_n\boldsymbol{b}_n = 0\boldsymbol{b}_1 + +0\boldsymbol{b}_2 + ... + 0\boldsymbol{b}_{n-1} + \lambda_n\boldsymbol{b}_n$$

Отсюда и получаем (##). ■

Определение. Задача **диагонализовать матрицу линейного оператора,** или (что то же самое) **привести матрицу линейного оператора к диагональному виду** – значит найти (если это возможно) базис (из собственных векторов) в котором матрица оператора диагональная, и записать эту диагональную матрицу. При этом надо указать матрицу перехода к новому базису, она состоит из координат этих собственных векторов в исходном базисе, записанных по столбцам.

А когда же такой базис из собственных векторов существует? Ответ дает:

Теорема 4.8. *Для линейного оператора с матрицей A, действующего в конечномерном линейном пространстве* L, *существует базис из собственных векторов тогда и только тогда, когда все корни характеристического многочлена вещественны, а алгебраическая кратность каждого такого корня* λ *равна его геометрической кратности, т.е. числу* $\dim L - \mathrm{rg}(A - \lambda E)$.

Следствие 4.9. *Если все корни характеристического многочлена линейного оператора вещественны (= действительны) и простые, т.е. кратности 1, то для этого линейного оператора существует базис из собственных векторов.*

Пример 4.3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с данной матрицей:

$$\text{(а)} \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \;\; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Диагонализовать матрицу оператора, если это возможно.

Решение. (а) Эту матрицу мы уже рассматривали ранее (см. пример *) и уже нашли собственные числа $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ и соответствующие собственные векторы $\boldsymbol{f}_1 = (1; -1)$ и $\boldsymbol{f}_2 = (1; 3)$.

Все корни вещественные кратности 1, диагонализовать можно.

Диагональный вид матрицы:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

матрица перехода к новому базису (из собственных векторов)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Обратная матрица перехода

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

матрица оператора в новом базисе:

$$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(б) Характеристический многочлен имеет вид $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha_1\lambda + \alpha_2$, где $\alpha_1 = \mathrm{Tr}(B) = 1+5 = 6, \alpha_2 = \det(B) = 9,$ следовательно $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$, единственное собственное число $\lambda = 3$ алгебраической кратности 2. Матрица

$$B - \lambda E = B - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1, поэтому геометрическая кратность значения $\lambda = 3$ равна $r_g(3) = 2-1 = 1$, данному собственному числу отвечает только один линейно независимый вектор:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f} = (2;1)$ (все остальные собственные векторы ему пропорциональны), следовательно, матрицу этого линейного оператора диагонализовать **нельзя**.

(в) аналогично находим характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^3 - \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda - \alpha_3$, где

$$\alpha_1 = \mathrm{Tr}(C) = 1+1+3 = 5,$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{22} & a_{32} \\ c_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3+1+5 = 9,$$

$$\alpha_3 = \det C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Характеристическое уравнение $P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 9) = 0$.

Его корни: $\lambda_1 = 0$, а остальные $\lambda_{2,3} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-36}}{2}$ – комплексные, следовательно, матрицу и этого оператора диагональзовать **нельзя**. Собственному числу $\lambda = 0$ отвечает собственный вектор, координаты которого – ненулевые решения однородной СЛАУ с матрицей $C - 0E = C$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Приведем матрицу этой системы к ступенчатому виду

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен 2, поэтому всего один (линейно независимый) собственный вектор. В качестве базисных переменных выберем x_1 и x_3:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3 = 2C + 3C = 5C \\ x_3 = -3x_2 = -3C \\ x_2 = C \end{cases}$$

$X = C\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$**, где** $C \in \mathbf{R}$**,** $C \neq 0$

Собственному значению $\lambda = 0$ отвечает собственный вектор $\boldsymbol{f} = (5; 1; -3)$ (а также любой, ему пропорциональный). ■

Пример 4.3. можно рассмотреть на лекции частично (сколько успеете).